ЗАДАЧА В ДЛЯ ОДНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ ОБЛАСТЕЙ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ГРАНИЦАМИ

Ю. А. Шмагин

Казанская государственная архитектурно-строительная академия

В монографии И. Н. Векуа ([1], гл. V) для эллиптического дифференциального уравнения

$$M_0(u) \equiv \Delta^n u + \sum_{k=1}^{n} L_k\left(\Delta^{n-k} u\right) = 0, \tag{1}$$

$$n \geq 1, \Delta^0 = 1, \Delta^m = \Delta\left(\Delta^{m-1}\right), \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, L_k = \sum_{p,q=0}^{p+q\leq k} a_k^{pq}(x,y)\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q}, \tag{2}$$

с $\mathbf{R}$-аналитическими по x, y коэффициентами $a_k^{pq}(x,y)$ в односвязной области $T \subset \mathbf{C}$ с ляпуновской границей ∂T изучена следующая граничная задача: *найти регулярное в T действительное решение $u(x,y)$ уравнения (1) по граничным условиям*

$$\left(\frac{d^j u}{d\nu^j}\right)^+ = f_j, \; j = 0,1,\ldots,n-1, \tag{3}$$

где ν – внешняя нормаль к гладкому контуру

$$\partial T = \{\, t = t(s) = x(s) + iy(s), \; s \in [0,l] \,\}, \tag{4}$$

на котором заданные функции $f_j(s) = f_j[t(s)]$ имеют непрерывные производные по дуге s порядка не выше $(2n-j)$ $(j = 0,1,\ldots,n-1)$. Эта задача ради краткости названа И. Н. Векуа задачей В, а соответствующая однородная задача (при нулевых граничных условиях (3)) – задачей B_0.

Переход в (1) к комплексным переменным

$$z = x + iy, \; \zeta = x - iy, \quad u(x,y) = u\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right) = U(z,\zeta), \tag{5}$$

приводит к комплексному дифференциальному уравнению

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{n} A_{km}(z,\zeta)\frac{\partial^{k+m} U}{\partial z^k \partial \zeta^m} = 0, \; A_{nn} = 1, \tag{6}$$

которое может быть записано также в виде

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{n} \frac{\partial^{k+m}\left(B_{km} U\right)}{\partial z^k \partial \zeta^m} = 0, \quad B_{km} = B_{km}(z,\zeta), \quad B_{nn} = 1. \tag{7}$$

В (6) и (7) символы $\partial/\partial z$ и $\partial/\partial\zeta$ есть операторы комплексного дифференцирования (символы Виртингера)

$$2\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y},\quad 2\frac{\partial}{\partial \zeta}=\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}. \tag{8}$$

Любую односвязную область D, принадлежащую области задания уравнения (1), И. Н. Векуа назвал *односвязной областью* уравнения (1), если *все* коэффициенты $A_{km}(z,\zeta)$ в (6) являются *одновременно* аналитическими функциями двух комплексных переменных z,ζ в цилиндрической области $(D\times\overline{D})$, то есть при $z\in D$ и $\zeta\in\overline{D}$. Для уравнения (1) с **R**-аналитическими коэффициентами $a_k^{pq}(x,y)$ в некоторой области любое регулярное решение $u(x,y)$ является **R**-аналитическим в этой области. Опираясь на эту теорему Пикара, И. Н. Векуа получил следующий важный результат: если $u(x,y)$ есть решение уравнения (1), регулярное в основной области D, то функция $U(z,\zeta)$ (5) является аналитической функцией переменных z,ζ в $(D\times\overline{D})$ и представляет собой аналитическое продолжение функции $u(x,y)$ в область комплексных значений x,y.

Операторы Виртингера (8) от аналитических по z и ζ функций $U(z,\zeta)$ вычисляются по законам частного дифференцирования. Поэтому задача построения регулярных решений (1) с **R**-аналитическими коэффициентами в области T, совпадающей с основной областью D уравнения (1) или $T\subset D$, приводится к построению аналитических в $(T\times\overline{T})$ решений $U(z,\zeta)$ уравнения (6) с аналитическими в $(D\times\overline{D})$ коэффициентами $A_{km}(z,\zeta)$. Именно для таких односвязных областей T, $T\equiv D$ или $T\subset D$, изложил И.Н.Векуа схему решения задачи В.

Когда $U(z,\zeta)$ есть аналитическое по z и ζ решение (7) в $(T\times\overline{T})$, то это уравнение можно переписать в виде уравнения Вольтерра, единственное решение которого представимо в виде

$$\begin{aligned}U(z,\zeta)&=U_0(z,\zeta)+\int_{z_0}^{z}\Gamma_1(z,\zeta,t)U_0(t,\zeta)dt+\\&+\int_{\zeta_0}^{\zeta}\Gamma_2(\zeta,z,\tau)U_0(z,\tau)d\tau+\int_{z_0}^{z}dt\int_{\zeta_0}^{\zeta}\Gamma(z,\zeta;t,\tau)U_0(t,\tau)d\tau,\end{aligned}\tag{9}$$

где каждому аналитическому в $(T\times\overline{T})$ решению $U_0(z,\zeta)$ уравнения

$$\frac{\partial^{2n} U_0}{\partial z^n \partial \zeta^n} = 0 \tag{10}$$

ставится в соответствие единственное решение $U(z,\zeta)$ уравнения (6), аналитическое в $(T \times \overline{T})$. В (9) $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma$ - аналитические функции своих аргументов при $z, t \in T$, $\zeta, \tau \in \overline{T}$, являются резольвентами ядер интегрального уравнения Вольтерра второго рода, обращением которого и является формула (9). Если в (9) подставить функцию

$$U_0 = (z-t)^{n-1}(\zeta-\tau)^{n-1} / ((n-1)!)^2,$$

считая в ней t и τ произвольными параметрами из областей T и $\overline{T}$ соответственно, и заменить z_0, ζ_0 на t и τ соответственно, то получится решение уравнения (6) $U = G(t,\tau;z,\zeta)$, называемое *функцией Римана* уравнения (1). Чтобы получить общее представление решений (6), надо взять общее представление решения $U_0(z,\zeta)$ уравнения (10)

$$U_0(z,\zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} \Big\{ a_k \frac{(z-z_0)^k}{k!} \frac{(\zeta-\zeta_0)^k}{k!} +$$

$$+ \frac{(z-z_0)^k}{k!} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{(\zeta-\tau)^k}{k!} \chi_k^*(\tau) d\tau + \frac{(\zeta-\zeta_0)^k}{k!} \int_{z_0}^{z} \frac{(z-t)^k}{k!} \chi_k(t) dt \Big\},$$

содержащее $2n$ произвольных функций $\chi_k(t)$ и $\chi_k^*(\tau)$, голоморфных в T и $\overline{T}$ соответственно, и n произвольных постоянных a_k, и подставить его в формулу (9). Тогда получим

$$U(z,\zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} \Big\{ a_k G_k(z_0,\zeta_0;z,\zeta) + \int_{z_0}^{z} G_k(t,\zeta_0;z,\zeta) \chi_k(t) dt +$$

$$+ \int_{\zeta_0}^{\zeta} G_k(z_0,\tau;z,\zeta) \chi_k^*(\tau) d\tau \Big\}, \tag{11}$$

где все функции $G_k(t,\tau;z,\zeta)$ $(k = 0,1,\dots,n-1)$ легко выражаются через функцию Римана

$$G_k(t,\tau;z,\zeta) = \frac{\partial^{2(n-k-1)} G(t,\tau;z,\zeta)}{\partial t^{n-k-1} \partial \tau^{n-k-1}}, \; k = 0,1,\dots,n-1.$$

Интегральное представление (11) используется при решении различных граничных задач для дифференциального уравнения (1), в том числе и задачи B с краевыми условиями (3). При решении, после перехода к переменным z и ζ в (1), совершается переход к этим переменным и в заданных граничных условиях. В результате условия (3) принимают вид

$$\frac{\partial^k U}{\partial t^k} = \sigma_k(s),\ k = 0,1,\dots,n-1, \tag{12}$$

где функции $\sigma_k(s)$ однозначно выражаются через $f_0(s), f_1(s), \dots, f_{k-1}(s)$ и наоборот, или

$$t^k \frac{\partial^k U}{\partial t^k} = t^k \sigma_k(s),\ k = 0,1,\dots,n-1. \tag{13}$$

И тогда при помощи интегрального представления (11) для определения неизвестных голоморфных функций $\chi_k(z)$ и $\chi_k^*(\tau)$ из краевых условий (12) и (13) получается система интегро-дифференциальных уравнений, которая затем преобразуется в систему уравнений Вольтерра второго рода.

Однако следует заметить, что метод интегральных уравнений не позволяет построить решения в замкнутой форме. Как правило, частные случаи уравнения (1), разрешимые в квадратурах, решаются другими приемами.

Примером может служить та же задача B в случае единичного круга $T = \{z : |z| < 1\}$ для n-гармонического уравнения $\Delta^n u = 0$. В этом случае вместо интегрального уравнения (11) имеем

$$u(x,y) = \operatorname{Re} F_n(z,\bar{z}) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \varphi_k(z) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n-1} F_k(z,\bar{z}),$$

где произвольные аналитические в T функции $\varphi_k(z)$должны удовлетворять условиям

$$\varphi_k^{(m)}(0) = 0,\ m = 0,1,\dots,k-1;\ k \geq 1,$$

$$\varphi_k^{(k)}(0) = \overline{\varphi_k^{(k)}(0)},\ k = 0,1,\dots,n-1,$$

а $F_k(z,\bar{z})$ есть k-аналитические в T функции: $\Delta^k F_k(z,\bar{z}) = 0$. С помощью этого представления краевая задача B приводится к совокупности n граничных задач Шварца

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \left. \dfrac{\partial^l F_k(z,\bar{z})}{\partial z^l} \right|_{z=t} = 0,\quad l = 0,1,\dots,k-1; \\[2ex] \operatorname{Re} \left. \dfrac{\partial^k F_k(z,\bar{z})}{\partial z^k} \right|_{z=t} = f_k(s) - \sum\limits_{l=0}^{k-1} f_l(s), \end{cases}$$

решаемых последовательно друг за другом.

Иногда в замкнутой форме можно решить задачу B и для более сложных областей, чем круг. Такие примеры удается довести до конца в случае областей, когда граница ∂T представляет собой алгебраическую кривую, заданную неприводимым уравнением

$$P(x,y)=0, \qquad (14)$$

где P – некоторый вещественный полином. Известно, что такая алгебраическая кривая рода $\rho \ge 0$ всегда состоит из $s \le \rho + 1$ непересекающихся овалов. При решении используется метод симметрии в уточненной трактовке Л. И. Чибриковой [2]. Преобразуем наряду с уравнением (1) к новым переменным z и ζ (5) и уравнение границы (14). Тогда аналитическое продолжение дифференциального уравнения (6) надо рассматривать на римановой поверхности симметрии алгебраического уравнения

$$P\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right)=0 \qquad (15)$$

того же рода ρ. И таким образом некоторые граничные задачи для уравнения (1) могут оказаться эквивалентными построению функций, аналитических на римановой поверхности уравнения (15).

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И.Н. *Новые методы решения эллиптических уравнений.* – М.-Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1948. – 296 с.

2. Чибрикова Л.И. *Граничные задачи теории аналитических функций на римановых поверхностях* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР/ Сер."Математ. анализ " – Т.18. – М.: ВИНИТИ, 1980. – С.3 – 67.

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ТОНКИХ ПРОФИЛЕЙ В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ И ИХ ПРЕДЕЛЬНОЕ ВЫРОЖДЕНИЕ. АКУСТИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС

И. И. Ефремов, Е. П. Лукащик

Кубанский государственный аграрный университет, Краснодар
nauka@kubgau.kuban.ru

Рассматривается задача малых установившихся колебаний тонких профилей в сжимаемой жидкости, ограниченной плоскими твердыми и свободными границами. Для определенности возьмем решетку тонких профилей без выноса с произвольным сдвигом фаз μ колебаний